Beurteilende Statistik mit Hilfe didaktischer Software

Andreas Ulovec, Fakultät für Mathematik, Universität Wien

Es wird selbst erstellte Software vorgestellt und anhand von Beispielen erklärt, mit deren Hilfe eine Vielzahl der üblichen Schulaufgaben aus der beurteilenden Statistik einfach und anschaulich gelöst werden kann. Die einzelnen Softwareprodukte (Stichprobensimulation, Normalverteilung, Binomialverteilung, Normalverteilung_Testen und Normalverteilung kritische_Werte) können gratis aus dem Internet (http://www.mat.univie.ac.at/mv) heruntergeladen werden.

1. Einleitung

Im Bereich der beurteilenden Statistik ist nur wenig unterrichtsrelevante Software zu finden. Die existierende Software ist meist professionelle Statistik-Software, mit deren Hilfe natürlich alle Schulaufgaben ebenfalls zu lösen wären, die aber aufgrund ihrer Komplexität und komplizierten Bedienbarkeit für den Unterrichtseinsatz wenig geeignet erscheint. Vor diesem Hintergrund haben wir es uns zur Aufgabe gemacht, Software für den Einsatz im Unterricht zum Thema „beurteilende Statistik“ zu erstellen, die folgende Voraussetzungen erfüllt:

- Die Software kann nur eines oder wenige Dinge -> nicht überfrachtet, leicht bedienbar
- Sie läuft auf vielen Betriebssystemen und schaut überall (fast) gleich aus
- Sie bedarf wenig Erklärungen durch Lehrerin bzw. Lehrer

Um Plattformunabhängigkeit zu erreichen, haben wir uns entschlossen, die Software in Java zu implementieren. Zum Betrieb ist daher eine Java Runtime Environment (JRE) erforderlich, die gratis unter http://java.sun.com heruntergeladen werden kann. Getestet wurde die Software unter den Betriebssystemen Windows (NT, 2000, XP), Linux (RedHat, Debian, Kubuntu), und Apple Mac (OS X).

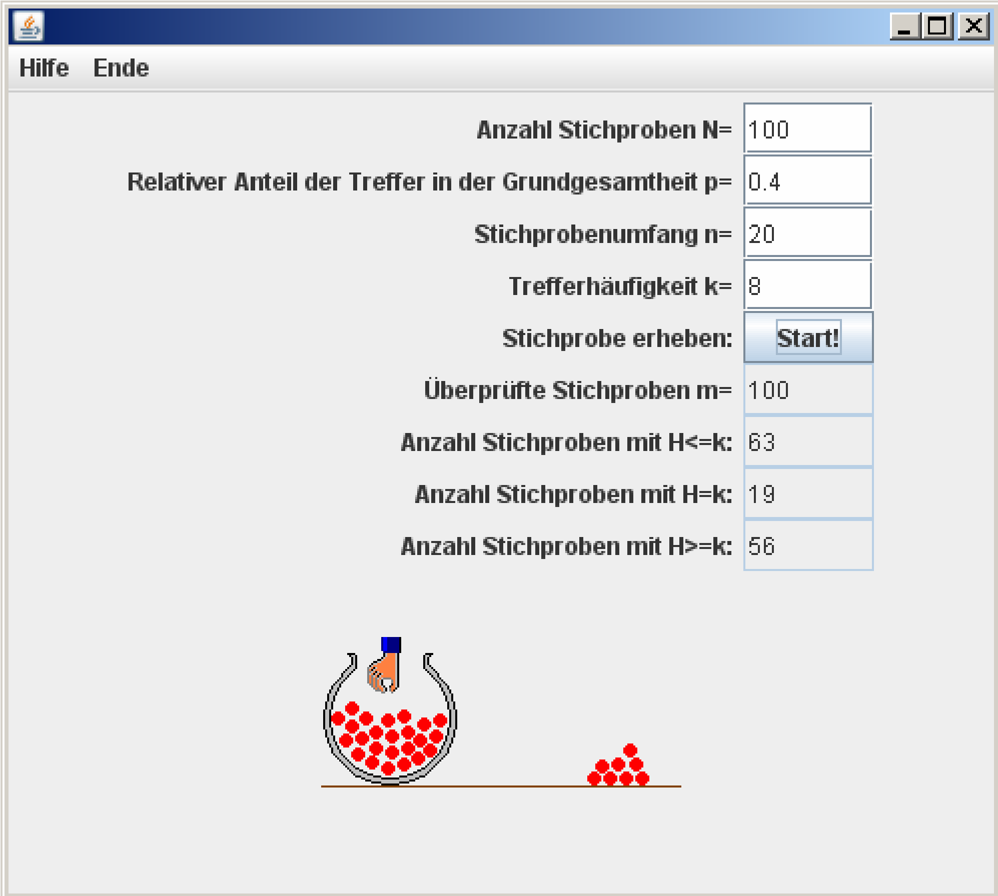
2. Vorstellung der einzelnen Software-Produkte

2.1 Stichprobensimulation

Die Software simuliert eine beliebige Anzahl von Stichproben mit einem wählbaren Umfang und gibt die Anzahl der Stichproben mit $H \leq k$, $H = k$, $H \geq k$ aus.

Typische Aufgabe: In einer Grundgesamtheit von 1000 Losen sind 400 Gewinnlose. Man zieht 20 Lose. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, (a) genau 8, (b) höchstens 8, (c) mindestens 8 Gewinnlose zu erhalten?

Um diese Aufgabe mit dem Programm Stichprobe zu lösen, gibt man zunächst die Anzahl der Stichproben, den relativen Anteil, den Umfang der Stichprobe, und die Trefferhäufigkeit ein und klickt auf den Start-Button. Man erhält:



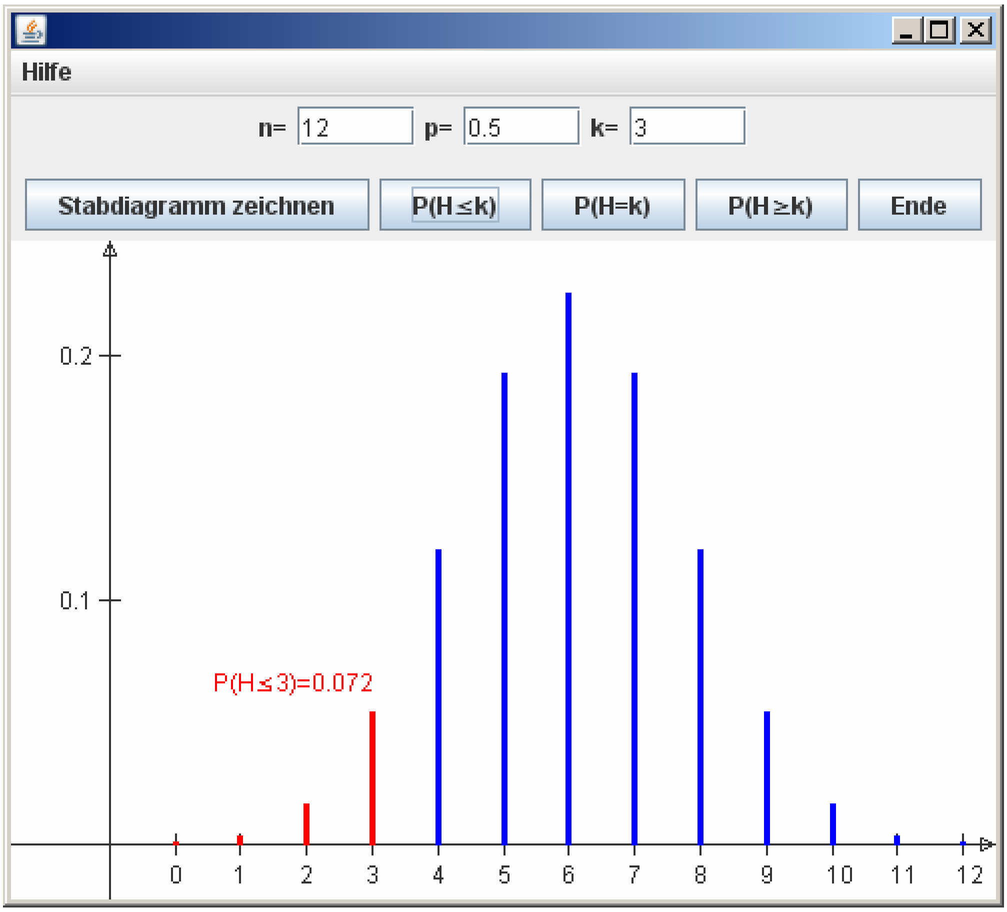
Im Anschluss berechnet man die relative Häufigkeit. Erhöht man die Anzahl der Stichproben, so nähert sich die relative Häufigkeit der Wahrscheinlichkeit an.

2.2 Binomialverteilung

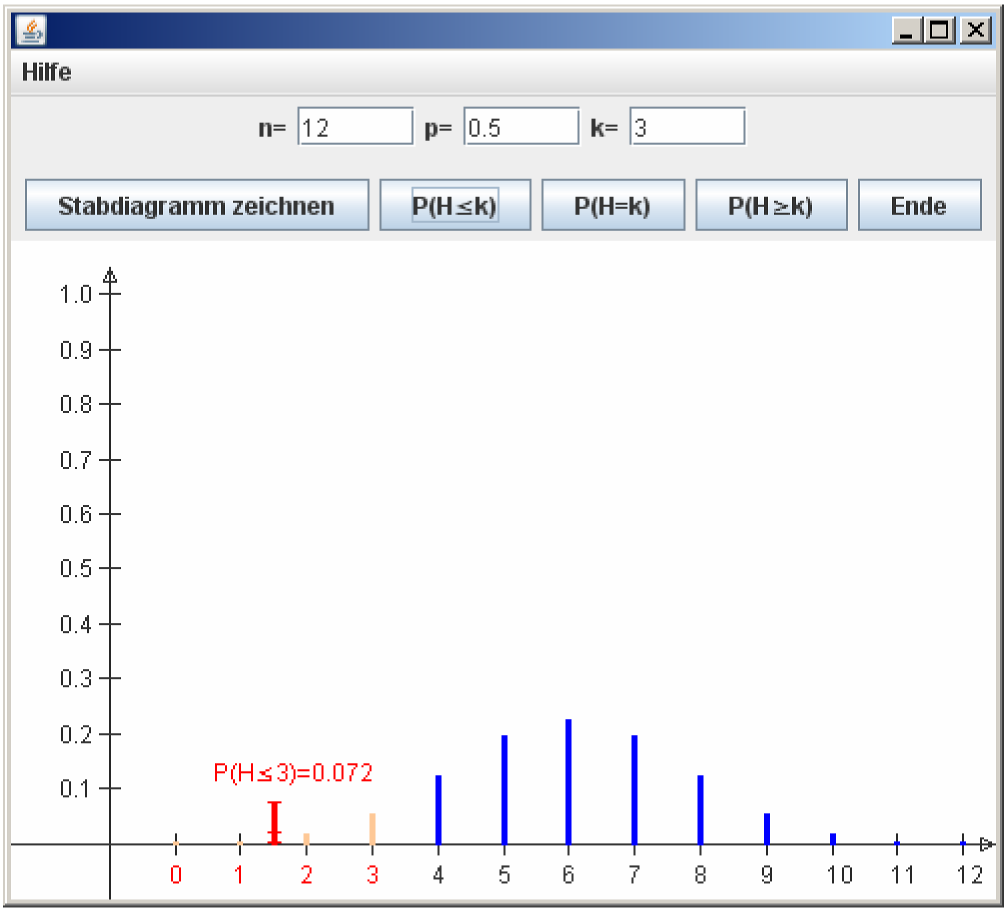
Die Software ermöglicht die Darstellung der Wahrscheinlichkeit durch ein Stabdiagramm, sowie die Berechnung von P(H≤k), P(H=k) und P(H≥k). Dabei gibt es zwei Varianten, bei der die Skalierung der 2. Achse entweder konstant bleibt (minimal 0, maximal 1) oder variiert (minimal 0, maximal je nach Eingabewert).

Typische Aufgabe: Eine Münze wird 12 x geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass „Zahl“ (a) genau 1 x, (b) mindestens 5 x, (c) höchstens 3 x kommt.

Man gibt die Anzahl der Versuche n, die Trefferwahrscheinlichkeit p und den Wert k ein. Zunächst kann man das Stabdiagramm mit einem Klick auf den entsprechenden Button zeichnen. Würde man Aufgabe (c) lösen wollen, müsste man für k=3 eingeben und den Button P(H≤k) anklicken. Es ergibt sich:



In der zweiten Variante der Software wird die resultierende Wahrscheinlichkeit so dargestellt:

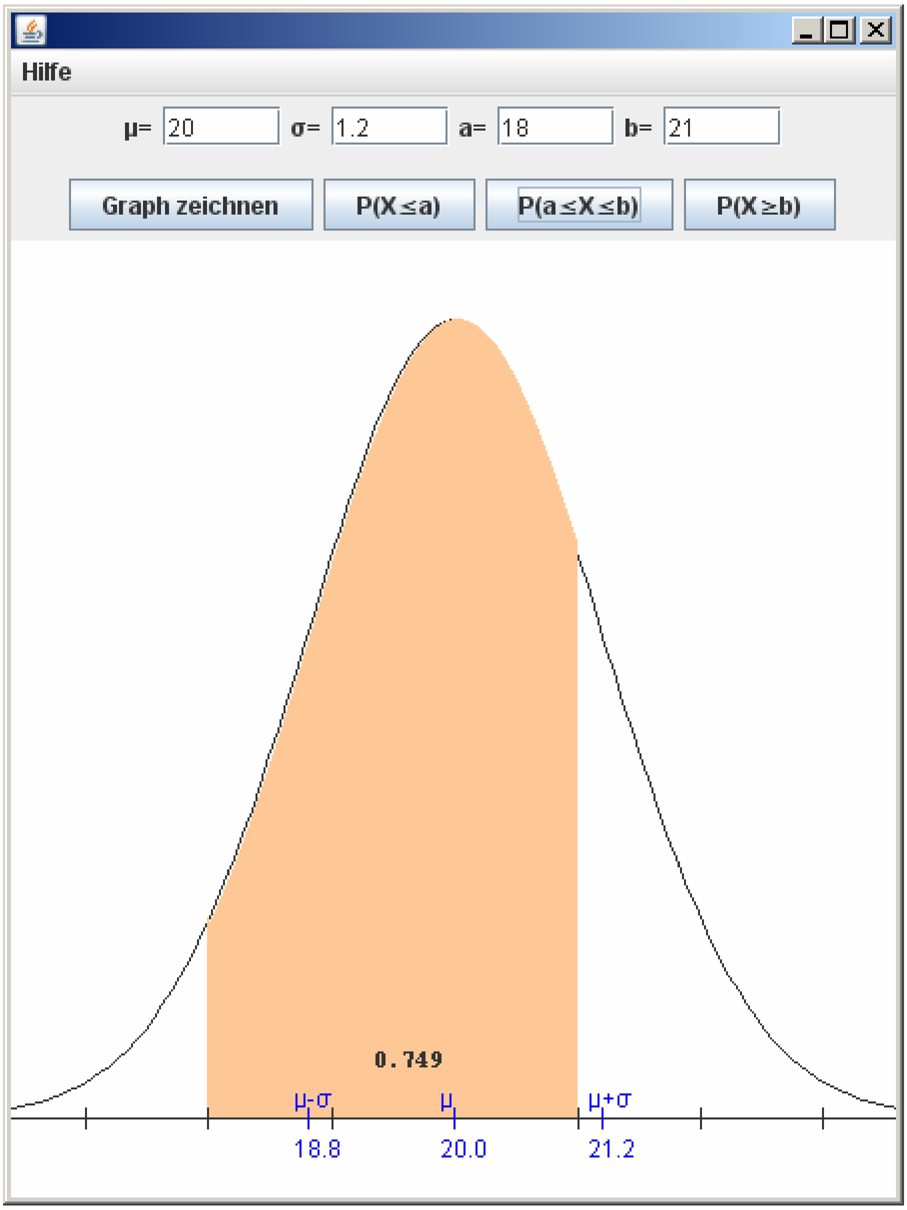


2.3 Normalverteilung

Die Software zeichnet die Gauss'sche Glockenkurve und berechnet die Wahrscheinlichkeiten $P(X \le a)$, $P(a \le X \le b)$ und $P(X \ge b)$.

Typische Aufgabe: Bei der Produktion von Stiften ist der Durchmesser annähernd normalverteilt mit $\mu=20$ mm und $\sigma=1{,}2$ mm. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Durchmesser eines Stiftes
(a) mindestens 21 mm
(b) zwischen 18 und 21 mm beträgt?

Man gibt zunächst die Parameter der Normalverteilung sowie die Werte a und b ein. Nach einem Klick auf „Graph zeichnen" erscheint die Glockenkurve in entsprechender Skalierung. Klickt man einen der Buttons für die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten, wird der entsprechende Wert berechnet und als Fläche unter der Kurve graphisch dargestellt. Für Aufgabe (b) ergibt sich:



Die Wahrscheinlichkeit $P(18 \le X \le 21)$ beträgt also 0,749.

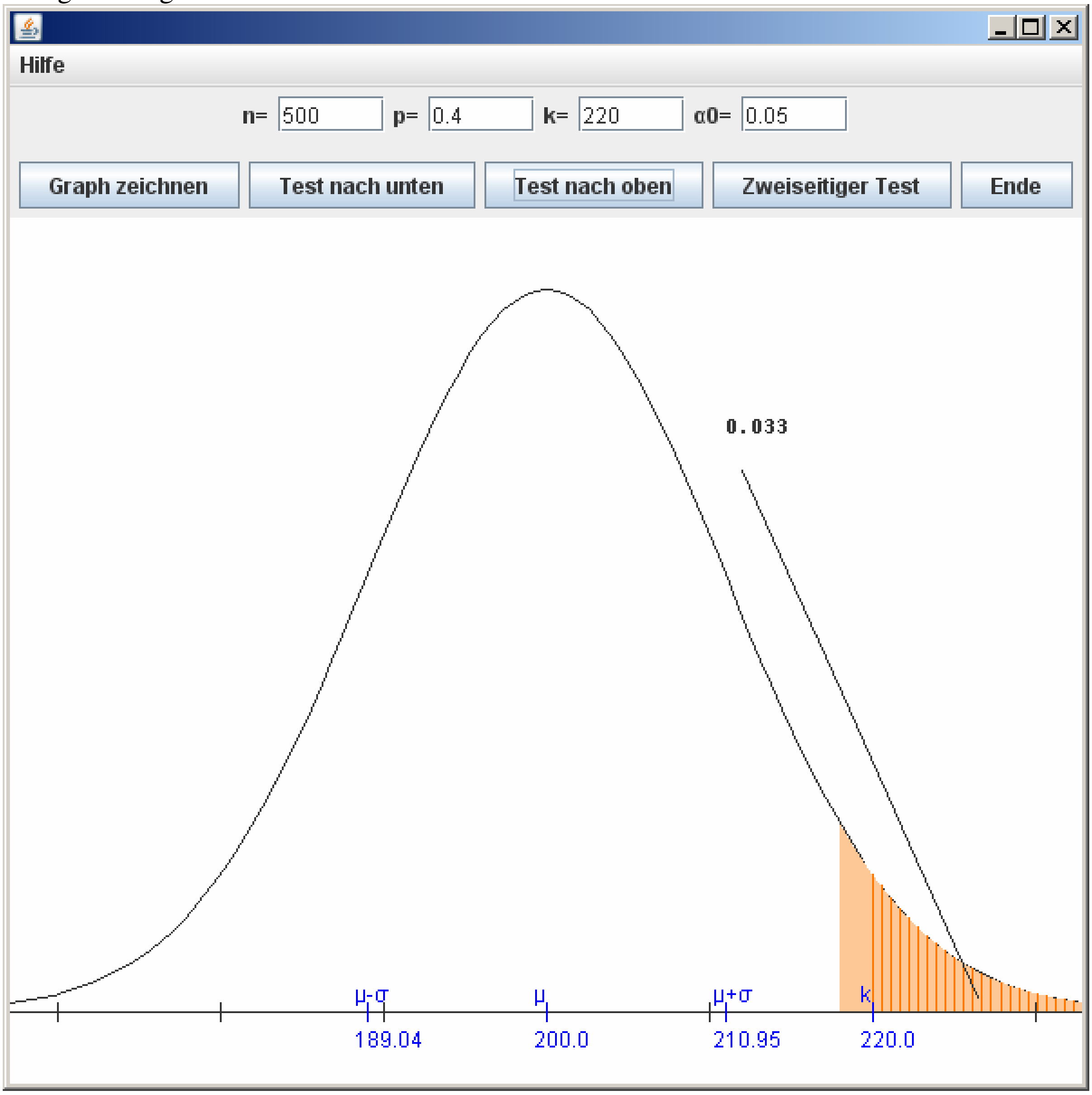
2.4 Annäherung der Binomialverteilung durch die Normalverteilung

Testen

Diese Software nähert eine Binomialverteilung durch eine passende Normalverteilung an (ob eine solche Annäherung zulässig ist, muss der Benutzer selbst entscheiden). Sie zeichnet die entsprechende Glockenkurve, testet ein- oder zweiseitig, und stellt das Ergebnis graphisch dar.

Typische Aufgabe: Angeblich sind nur 40% der Lose der Firma PlayLottery keine Gewinnlose. Ein Magazin zweifelt dies an und findet in einer Stichprobe von 500 Losen 220 Lose ohne Gewinn vor. Kann die Behauptung der Firma mit einer α_0=0,05 verworfen werden?

Man gibt die Stichprobengröße n, den relativen Anteil p, den Wert k sowie das Signifikanzniveau α_0 ein. Nach einem Klick auf die entsprechenden Buttons wird die Glockenkurve dargestellt, die der Irrtumswahrscheinlichkeit entsprechende Fläche wird schraffiert (und ihre Größe angezeigt), und die dem Signifikanzniveau entsprechende Fläche farbig unterlegt:

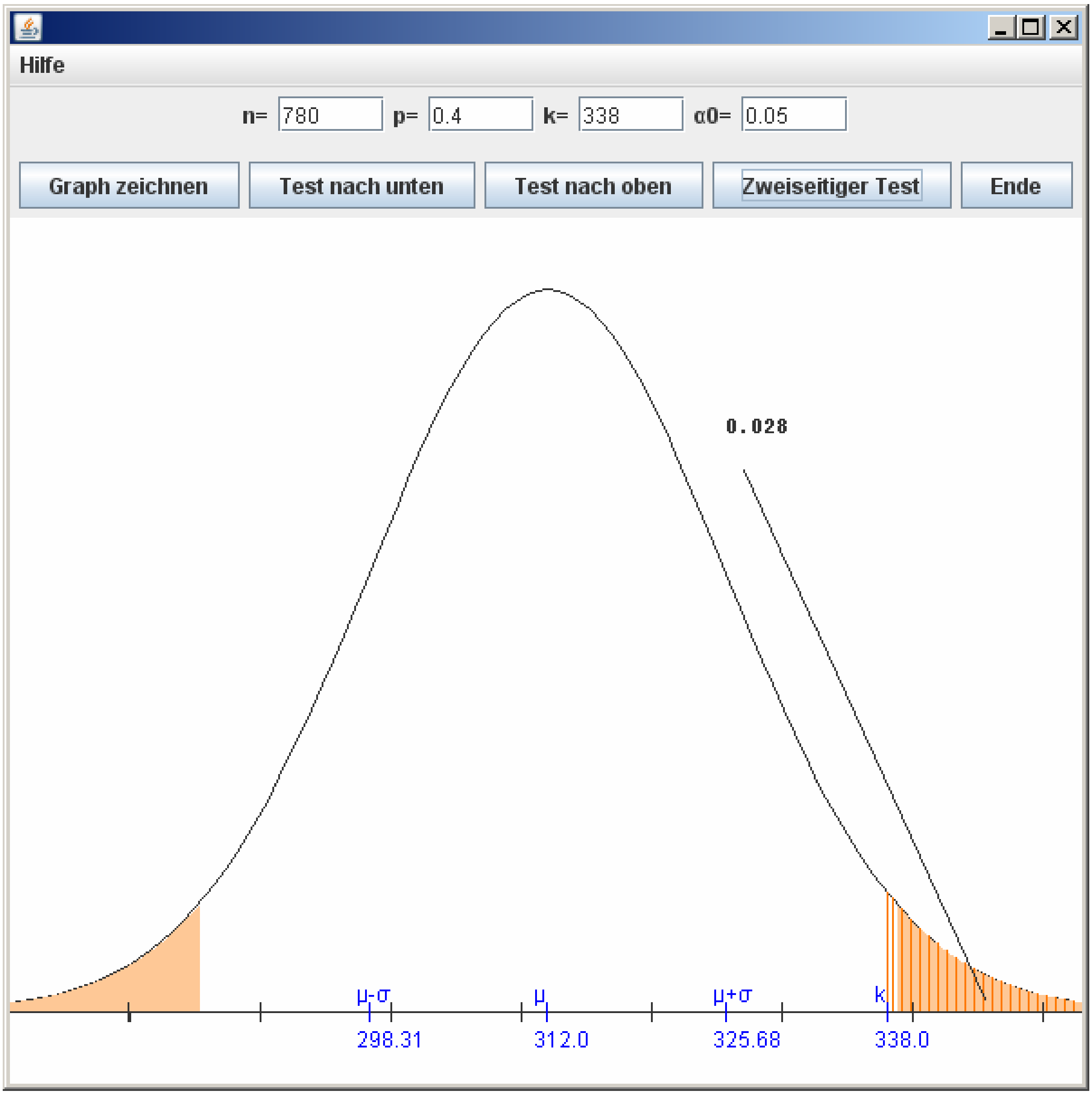


Ist die Irrtumswahrscheinlichkeit kleiner als das Signifikanzniveau (dh. die schraffierte Fläche kleiner als die farbige Fläche), kann die Behauptung verworfen werden (wie in diesem Beispiel).

Ähnlich auch beim zweiseitigen Testen:

Typische Aufgabe: Ein Medikament wirkt bei etwa 40% aller Patientinnen und Patienten. Nach einer Änderung des Wirkstoffs soll überprüft werden, ob sich die Wirksamkeit verändert hat. Von 780 getesteten PatientInnen wirkt das Medikament bei 338 von ihnen. Teste mit α_0=0,05

Wieder werden die Parameter eingegeben und diesmal der Button „Zweiseitiger Test" angeklickt:



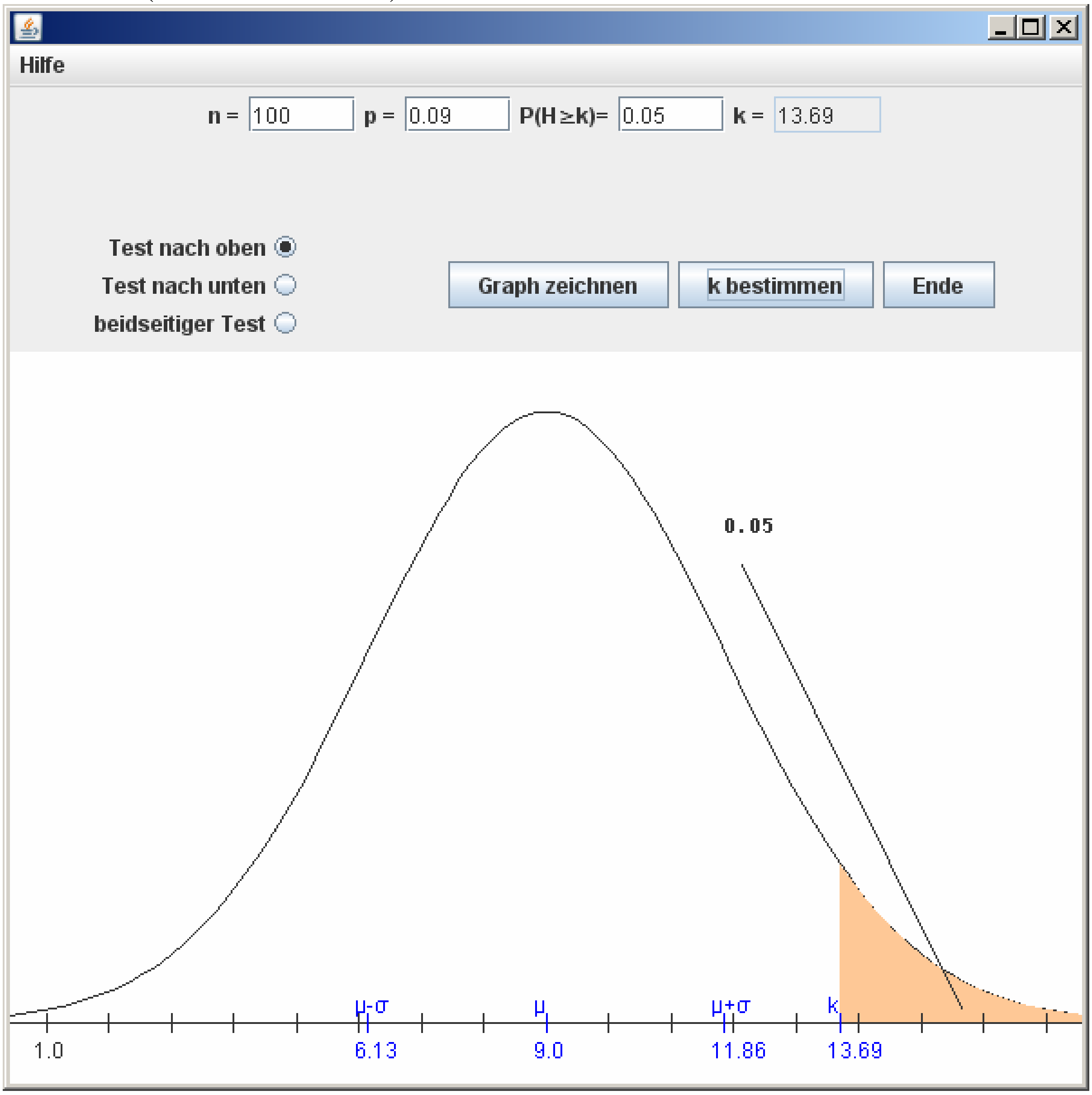
Da die Irrtumswahrscheinlichkeit größer als $\alpha_0/2$ ist (dh. die schraffierte Fläche größer als die farbige Fläche), kann hier nicht mit Irrtumswahrscheinlichkeit 0,05 behauptet werden, die Wirksamkeit habe sich verändert.

Kritische Werte bestimmen

Auch bei dieser Software wird die Binomialverteilung durch eine passende Normalverteilung angenähert. Hier werden allerdings die kritischen Werte zum ein- oder zweiseitigen Testen bestimmt und das Ergebnis wieder graphisch dargestellt.

Typische Aufgabe: Bei der Fertigung eines bestimmten Bauteils werden erfahrungsgemäß 9% Ausschuss produziert. Zur Kontrolle werden täglich 100 Stück entnommen. Wie viele Ausschuss-Stücke müssten in dieser Stichprobe mindestens sein, um mit der maximalen Irrtumswahrscheinlichkeit α_0=0,05 sagen zu können, dass sich der Prozentsatz erhöht hat?

Man gibt die Stichprobengröße n, den relativen Anteil p, sowie die maximale Irrtumswahrscheinlichkeit P(H≤k) bzw. P(H≥k) ein und entscheidet sich für die passende Art des Testens (hier: Test nach oben):

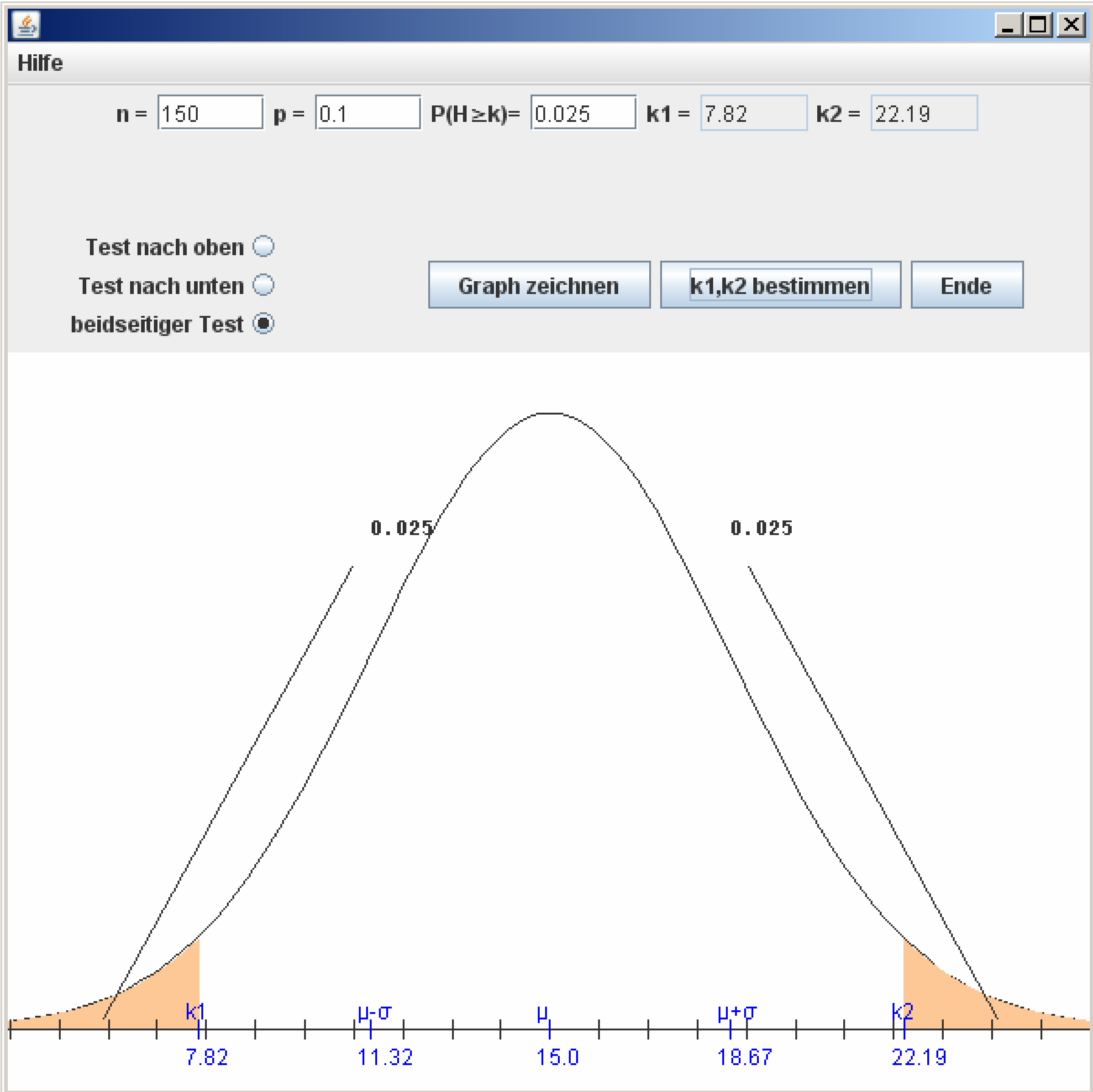


Der kritische Wert beträgt 13,69. Es müssten also mindestens 14 Ausschuss-Stücke in der Stichprobe sein, um mit Irrtumswahrscheinlichkeit α_0=0,05 sagen zu können, dass sich der Prozentsatz erhöht hat.

Ebenso erfolgt die Bestimmung der kritischen Werte beim zweiseitigen Testen:

Typische Aufgabe: Erfahrungsgemäß haben 10% der Bahnfahrer keinen gültigen Fahrausweis. Ein Kontroll-Beamter will herausfinden, ob sich dieser Prozentsatz geändert hat und überprüft 150 Fahrgäste. Wie viele davon müssten ohne Fahrausweis unterwegs sein, um mit $\alpha_0=0{,}05$ sagen zu können, dass sich der Prozentsatz geändert hat?

Hier ist wieder die Stichprobengröße n, der relative Anteil p, und maximale Irrtumswahrscheinlichkeit $P(H\leq k_1)$ bzw. $P(H\geq k_2)$ einzugeben. Dabei ist darauf zu achten, dass $P(H\leq k_1)$ bzw. $P(H\geq k_2)=\alpha_0/2$ gilt! Wenn also mit $\alpha_0=0{,}05$ zweiseitig getestet werden soll, muss als maximale Irrtumswahrscheinlichkeit 0,025 eingegeben werden:



Die kritischen Werte betragen $k_1=7{,}82$ und $k_2=22{,}19$. Wenn also höchstens 7 oder mindestens 23 Fahrgäste keinen Fahrausweis haben, kann man mit $\alpha_0=0{,}05$ behaupten, dass sich der Prozentsatz geändert hat.

3. Abschließende Bemerkungen

Wie in jeder fairen Software-Präsentation wollen wir hier nicht nur erklären, was die beschriebenen Produkte können, sondern auch, was sie nicht können. Die Software erspart weder den LehrerInnen das Unterrichten von Verteilungen noch den SchülerInnen das Wissen darüber. Ganz im Gegenteil: Um die Software sinnvoll einsetzen zu können, müssen SchülerInnen und LehrerInnen über die mathematischen Hintergründe bescheid wissen, sonst erhalten sie falsche, vom Kontext her sinnlose oder mathematisch unbegründete Antworten. Ebenso kann die Software komplexere Verteilungen und Tests nicht behandeln, wie etwa Multinomialverteilung, t-Verteilung, χ^2-Verteilung, Varianzanalyse, F-Tests, ...

Noch einige kurze Informationen zur Verwendung: Die Software ist gratis auf der Homepage http://www.mat.univie.ac.at/mv herunterzuladen und kann ohne Lizenzgebühren im Unterricht, sowie auf den Schulrechnern und den Privatrechnern von LehrerInnen und SchülerInnen eingesetzt werden. Die Software ist allerdings nicht open source, dh. eine Weiterentwicklung oder Veränderung durch die BenutzerInnen ist nicht zulässig. Ebenso ist es nicht gestattet, die Software weiterzuvertreiben.

Wir hoffen, mit der Software ein praktisches Hilfsmittel für den Unterricht zur Verfügung zu stellen, das Handarbeit und das Blättern in Tabellen reduziert. Der modulare Aufbau, die graphische Darstellung und die einfache Bedienung lässt uns die Software für den Unterricht geeignet erscheinen, der „Härtetest“ einer umfangreichen Verwendung in den Klassenzimmern steht allerdings noch bevor. Daher sind wir auch für jede Rückmeldung, Kritik, Lob, Verbesserungsvorschläge dankbar.